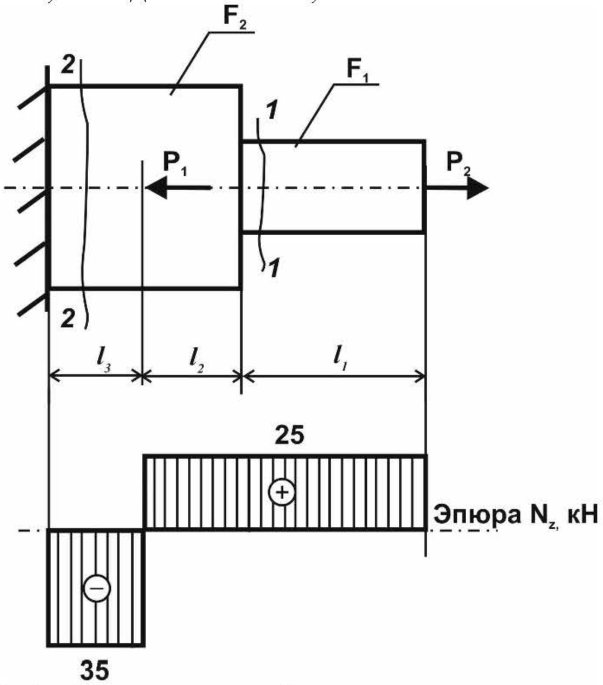
Институт ЭнМИ
Направление подготовки **15.04.03 Прикладная механика**

Пример решения задач билета

№ задания	Формулировка и решение задания
Задания базового уровня	
6.1	Найдем эквивалентные напряжения, пользуясь гипотезой максимальных касательных напряжений $$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{10^2 + 4 \cdot 80^2} \approx 160{,}3 \text{ МПа}$$ Коэффициент запаса прочности $$n = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{экв}}} = \frac{240}{160{,}3} \approx 1{,}5$$
7.1	Значение наибольших касательных напряжений для статически определимой схемы №1 можно определить по формуле $$\tau^I = \frac{m}{w_p}$$ где w_p- значение полярного момента сопротивления стержня. Схема №2 статически неопределима. Раскрывая статическую неопределимость найдем, что в опоре В значение крутящего момента будет равно m/5 при этом момент в этой опоре направлен противоположно направлению приложения момента m. Тогда наибольшие касательные напряжения для статически неопределимой схемы №2 можно определить по формуле $$\tau^{II} = \frac{4}{5}\frac{m}{w_p}$$ Следовательно, $\tau^{II} = \frac{4}{5}\tau^I = 80$ (МПа).
8.1	Определим величину изгибающего момента в сечении А. Поскольку балка защемлена, в заделке возникают неизвестные момент и перерезывающая сила, поэтому расчет начинаем со свободного конца. $$M_x{}^A = -m_1 - P_1(l_2 + l_3) + P_2 l_3$$ Значение изгибающего момента (по модулю) в сечении А равно $$\left|M_x{}^A\right| = \lvert -15 - 20 \cdot (2+3) + 30 \cdot 3 \rvert = 25(\text{кН} \cdot \text{м})$$ Определим осевой момент инерции сечения относительно оси Ох. Представим момент инерции сечения как разность моментов инерции круга и прямоугольника. Для круга ось Ох проходит через центр тяжести $$J_{x\ \text{круга}} = \frac{\pi d^4}{64}$$ Для прямоугольника ось Ох проходит через центр тяжести $$J_{x\ \text{прямоуг.}} = \frac{bh^3}{12}$$ Момент инерции сечения $$J_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{3{,}14 \cdot 200^4}{64} - \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 760 \cdot 10^5(\text{мм}^4) = 7{,}6 \cdot 10^{-5}(\text{м}^4)$$ Осевой момент сопротивления сечения равен

№ задания	Формулировка и решение задания
	$W_x = \dfrac{J_x}{d/2} = \dfrac{7{,}6 \cdot 10^{-5}}{0{,}1} = 7{,}6 \cdot 10^{-4}(\text{м}^3)$ Максимальные нормальные напряжения (по модулю) в сечении А будут равны $\lvert\sigma^{max}\rvert = \dfrac{\lvert M_x{}^A\rvert}{W_x} = \dfrac{25 \cdot 10^3}{7{,}6 \cdot 10^{-4}} \approx 33(\text{МПа})$
9.1	Построим эпюру продольных сил N_z по длине стержня. Поскольку стержень защемлен, в заделке возникает неизвестная реакция в опоре, поэтому расчет начинаем со свободного конца. Делим брус на участки нагружения, строим эпюру продольных сил. Имеем два участка нагружения. Участок 1: N_1=+25 кН, растянут. Участок 2: +25-60+N_2=0, отсюда N_2=-35 кН, сжат.  На каждом участке (l_1, l_2, l_3) определим абсолютное удлинение. $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 l_1}{EF_1} = \dfrac{25 \cdot 10^3 \cdot 0.5}{200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0{,}125(\text{мм})$ $\Delta l_2 = \dfrac{N_1 l_2}{EF_2} = \dfrac{25 \cdot 10^3 \cdot 0.4}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0{,}05(\text{мм})$ $\Delta l_3 = \dfrac{N_2 l_3}{EF_2} = \dfrac{-35 \cdot 10^3 \cdot 0.4}{200 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0{,}07(\text{мм})$ Абсолютное перемещение свободного конца стержня будет равно $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0{,}125 + 0{,}05 - 0{,}07 = 0{,}105(\text{мм})$
10.1	Система имеет 2 степени свободы. За обобщенные координаты выберем вертикальное перемещение диска $q_1 = y$ и угол поворота $q_2 = \varphi$. Уравнения колебаний удобно взять в виде $\mathbf{FM\ddot{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}$– диагональная матрица инерции, $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$– матрица податливостей. В развернутой форме записи уравнения имеют вид $f_{11} m_1 \ddot{q}_1 + f_{12} m_2 \ddot{q}_2 + q_1 = 0$, $f_{21} m_1 \ddot{q}_1 + f_{22} m_2 \ddot{q}_2 + q_2 = 0$.

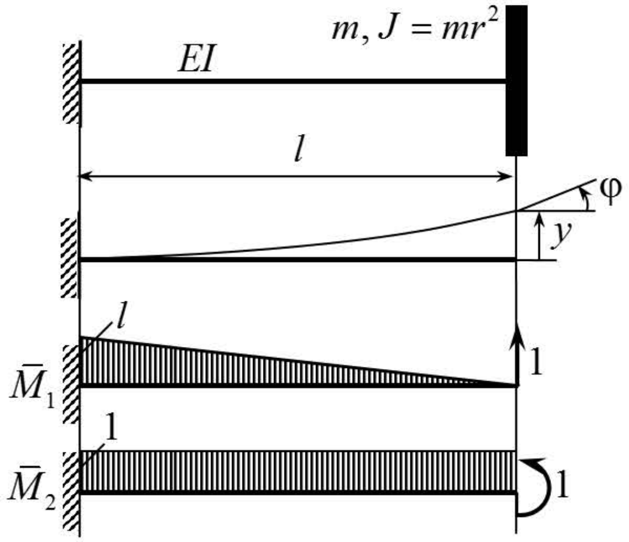
№ задания	Формулировка и решение задания

В нашем примере $m_1 = m,\ m_2 = J,\ q_1 = y,\ q_2 = \varphi$.

$$f_{11} m\ddot{y} + f_{12} J\ddot{\varphi} + y = 0,\quad f_{21} m\ddot{y} + f_{22} J\ddot{\varphi} + \varphi = 0.$$

Для нахождения элементов матрицы податливостей приложим в направлении обобщенных координат единичные безразмерные усилия, построим соответствующие единичные моменты $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$.

В результате вычисления интегралов Максвелла – Мора получим



$$f_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2(z)}{EI} dz = \frac{l^3}{3EI},\quad f_{12} = f_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2^2(z)}{EI} dz = \frac{l^2}{2EI},$$

$$f_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1(z)\bar{M}_2(z)}{EI} dz = \frac{l}{EI}.$$

Решение уравнений в виде $y = v_1 \cos\omega t$, $\varphi = v_2 \cos\omega t$ приводит к уравнениям относительно амплитуд

$$\left(1 - \omega^2 f_{11} m\right) v_1 - \omega^2 f_{12} J v_2 = 0,\quad -\omega^2 f_{21} m v_1 + \left(1 - \omega^2 f_{22} J\right) v_2 = 0.$$

Частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 f_{11} m & -\omega^2 f_{12} J \\ -\omega^2 f_{21} m & 1 - \omega^2 f_{22} J \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left(1 - \omega^2 f_{11} m\right)\left(1 - \omega^2 f_{22} J\right) - \omega^4 f_{12} f_{21} mJ = 0,$$

$$\omega^4 mJ\left(f_{11} f_{22} - f_{12}^2\right) - \omega^2\left(f_{11} m + f_{22} J\right) + 1 = 0.$$

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = \frac{l^4}{12(EI)^2},\ mJ = m^2 r^2 = \frac{m^2 l^2}{9},\ f_{11} m + f_{22} J = \frac{ml}{EI}\left(\frac{l^2}{3} + r^2\right) = \frac{4ml^3}{9EI}$$

№ задания	Формулировка и решение задания

$$\frac{m^2 l^6}{108(EI)^2}\omega^4 - \frac{4ml^3}{9EI}\omega^2 + 1 = 0,$$ его корни $$\omega_1^2 = 2,3667\frac{EI}{ml^3},$$

$$\omega_2^2 = 45,6333\frac{EI}{ml^3},\quad \omega_1 = 1,5384\sqrt{\frac{EI}{ml^3}},\quad \omega_2 = 6,7552\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

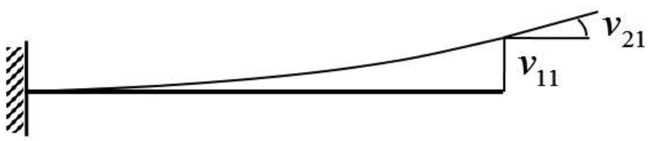
$$\frac{v_{2j}}{v_{1j}} = \frac{1-\omega_j^2 f_{11} m}{\omega_j^2 f_{12} J},\quad \omega_j^2 = k_j^2\frac{EI}{ml^3},\quad k_1^2 = 2,3667,\quad k_2^2 = 45,6333$$

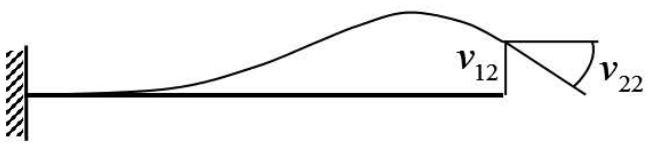
$$\frac{v_{2j}}{v_{1j}} = \frac{1-\omega_j^2 f_{11} m}{\omega_j^2 f_{12} J} = \frac{1-k_j^2\dfrac{EI}{ml^3}\dfrac{l^3 m}{3EI}}{k_j^2\dfrac{EI}{ml^3}\dfrac{l^2 mr^2}{2EI}} = \frac{1-k_j^2/3}{k_j^2 l/18},$$ или $$\frac{v_{2j} l}{v_{1j}} = 18\frac{1-k_j/3}{k_j}$$

$$\frac{v_{21} l}{v_{11}} = 18\frac{1-\dfrac{k_1^2}{3}}{k_1^2} = 18\frac{1-\dfrac{2,3667}{3}}{2,3667} = 1,6055$$

$$\frac{v_{22} l}{v_{12}} = 18\frac{1-\dfrac{k_2^2}{3}}{k_2^2} = 18\frac{1-\dfrac{45,6333}{3}}{45,6333} = -5,6056$$

Графическая иллюстрация

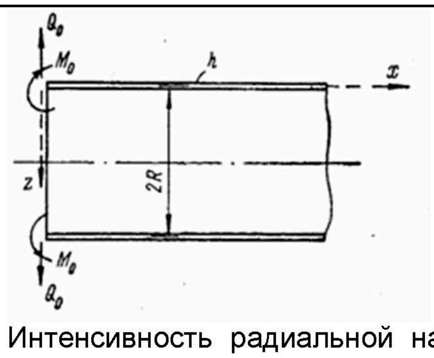




Проверим ортогональность по кинетической энергии:

$$a_{11}v_{11}v_{12} + a_{22}v_{21}v_{22} = v_{11}v_{12}\left(m + J\frac{v_{21}}{v_{11}}\frac{v_{22}}{v_{12}}\right) = v_{11}v_{12}m\left(1+\frac{l^2}{9}\frac{v_{21}}{v_{11}}\frac{v_{22}}{v_{12}}\right) =$$

$$= v_{11}v_{12}m\left(1+\frac{1,6055(-5,6056)}{9}\right) \equiv 0.$$

№ задания	Формулировка и решение задания
11.1	Обобщенная координата $q = x -$ горизонтальное перемещение центра масс рейки относительно положения равновесия, в котором пружины не деформированы. При перемещении рейки x цилиндр поворачивается на угол $\varphi = x/r$. Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}^2$, $\dot{\varphi} = \frac{\dot{x}}{r}$, $J_2 = \frac{m_2 r^2}{2}$, $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2 r^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}a\dot{x}^2$, $a = m_1 + \frac{m_2}{2} -$ инерционный коэффициент. Потенциальная энергия $\Pi = \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{2}c_2(\varphi l)^2 = \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\frac{x}{r}l\right)^2 = \frac{1}{2}\left(c_1 + c_2\frac{l^2}{r^2}\right)x^2 = \frac{1}{2}cx^2$, $c = c_1 + c_2\frac{l^2}{r^2} -$ коэффициент жесткости. Уравнение колебаний $a\ddot{x} + cx = 0$, или $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Собственная частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2\frac{l^2}{r^2}}{m_1 + \frac{m_2}{2}}}$.
12.1	 Интенсивность радиальной нагрузки равна нулю, и поэтому дифференциальное уравнение изгиба оболочки $\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{D}$ будет однородным: $\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0.$ Интеграл его не содержит частного решения и имеет вид $w = e^{\beta x}(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x) + e^{-\beta x}(C_3\sin\beta x + C_4\cos\beta x)$ Нагружение M_0 и Q_0 вызывает местный изгиб, радиальные перемещения быстро затухают. При этом необходимо учитывать, что при $x \to \infty$ $w \to 0$ Еще два условия можно записать для нагруженного торца: при $x = 0$ $M_x = M_0$ при $x = 0$ $Q_x = Q_0$

№ задания	Формулировка и решение задания

На основании первого условия получим

$$w_{x\to\infty} = \left[e^{\beta x}\left(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x\right)\right]_{x\to\infty} \to 0.$$

Чтобы это условие соблюдалось, круглая скобка должна быть равна нулю. Синус и косинус одновременно быть равными нулю не могут, следовательно, выполнение равенства возможно, только если $C_1 = C_2 = 0$. Тогда

$$w = e^{-\beta x}\left(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x\right)$$

и для определения двух постоянных C_3 и C_4 достаточно двух условий на нагруженном краю. Из второго условия найдем

$$\left(-D\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0} = M_0$$

и на основании

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x}$$

$$-\left(D\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x=0} = Q_0$$

Вычислим производные по x от выражения для перемещения w:

$$\frac{dw}{dx} = -\beta\left[C_3 e^{-\beta x}\left(\sin \beta x - \cos \beta x\right) + C_4 e^{-\beta x}\left(\cos \beta x - \sin \beta x\right)\right];$$

$$\frac{d^2w}{dx} = 2\beta^2\left[e^{-\beta x} \sin \beta x C_4 - e^{-\beta x} \cos \beta x C_3\right];$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 2\beta^3\left[C_3 e^{-\beta x}\left(\sin \beta x - \cos \beta x\right) + C_4 e^{-\beta x}\left(\cos \beta x - \sin \beta x\right)\right].$$

Тогда получим

$$D\beta^2 2C_3 = M_0$$

откуда

$$C_3 = \frac{M_0}{2D\beta^2}$$

Подставив найденное значение в выражение для поперечной силы, найдем

$$-2D\beta^3\left(\frac{M_0}{2D\beta^2} + C_4\right) = Q_0,$$

откуда

$$C_4 = -\frac{Q_0}{2D\beta^3} - \frac{\beta M_0}{2D\beta^3}$$

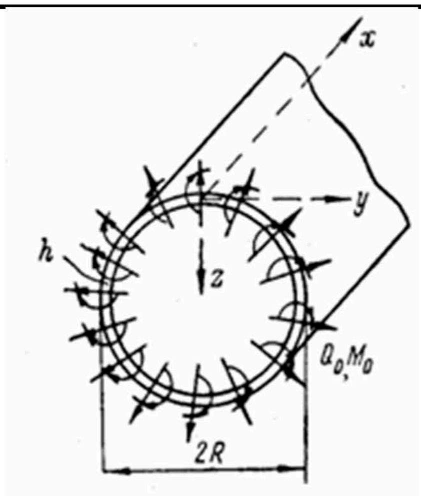
Подстановка найденных значений в выражение для прогиба дает уравнение изогнутой срединной поверхности оболочки

$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2D\beta^3}\left[M_0\beta\left(\sin \beta x - \cos \beta x\right) - Q_0 \cos \beta x\right]$$

На торце цилиндрической оболочки

$$w_{x=0} = w_{\max} = -\frac{1}{2D\beta^3}\left(\beta M_0 + Q_0\right)$$

где знак минус показывает, что при принятых за положительные усилия M_0 и Q_0 и оси z, направленной по радиусу к центру кривизны, как показано на рисунке

<table>
<tr><th>№ задания</th><th>Формулировка и решение задания</th></tr>
<tr><td></td><td>


перемещение w происходит от центра (радиус R увеличивается).
Подставляя заданные значения, найдем $|w(0)| \approx 0{,}55$ мм
</td></tr>
<tr><td>13.1</td><td>
Разрешающее уравнение для осесимметричного изгиба круглых пластинок через функцию прогиба w (r), имеет вид:

$$\frac{d^4w}{dr^4} + \frac{2}{r}\cdot\frac{d^3w}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\cdot\frac{dw}{dr} = \frac{q}{D}$$

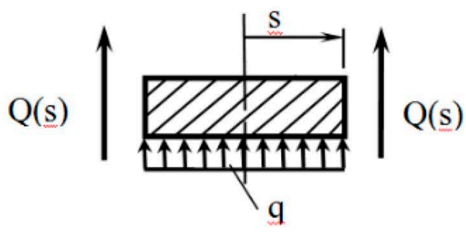
Относительно угла поворота это уравнение можно представить в виде

$$\theta'' + \frac{\theta'}{r} - \frac{\theta}{r^2} = \frac{Q}{D}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения.

$$\theta_{\text{частн.}} = \frac{1}{2D}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{r^2 - s^2}{r}Q(s)\cdot ds$$

Для определения **Q (s)** выделим **центральную часть пластинки радиусом «s»** и рассмотрим её равновесие:



$$\sum z = Q(s)\cdot 2\pi\cdot s + q\cdot\pi\cdot s^2 = 0,$$

откуда $Q(s) = -\frac{q}{2}\cdot s$

Тогда:

$$\theta_{\text{частн.}} = -\frac{q}{4D}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{r^2 - s^2}{r}\cdot s\cdot ds = -\frac{q}{4D}\int\limits_{r_0}^{r}\left(r - \frac{s^2}{r}\right)s\cdot ds = -\frac{q}{4D}\left(r\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4r}\right)\Bigg|_{r_0=0}^{r} =$$

$$= -\frac{q}{4D}\left(\frac{r^3}{2} - \frac{r^3}{4}\right) = -\frac{qr^3}{16D}.$$
</td></tr>
</table>

№ задания	Формулировка и решение задания
	Итак, **полное решение** будет: $$\theta = Ar + \frac{B}{r} - \frac{qr^3}{16D}$$ Граничные условия задачи: **при r=0, θ=0, откуда: B=0,** $$\theta = A \cdot r - \frac{qr^3}{16D}$$ **при r=a, θ=0, откуда:** $$A = \frac{qa^2}{16D}$$ Окончательно получаем: $$\theta = \frac{q}{16D}\left(a^2 \cdot r - r^3\right)$$ Вычислим изгибающие моменты: $$M_1 = D\left(\theta' + \mu\frac{\theta}{r}\right) = \frac{q}{16}\left(a^2 - 3r^2 + \mu a^2 - \mu r^2\right) = \frac{q}{16}\left[(1+\mu)a^2 - (3+\mu)r^2\right] =$$ $$= \frac{qa^2}{16}\left[(1+\mu) - (3+\mu)\frac{r^2}{a^2}\right],$$ $$M_2 = D\left(\frac{\theta}{r} + \mu\theta'\right) = \frac{qa^2}{16}\left[(1+\mu) - (1+3\mu)\frac{r^2}{a^2}\right]$$ Для построения эпюр изгибающих моментов вычислим ординаты: при r=0 $$M_1 = (1+\mu)\frac{qa^2}{16},\ M_2 = M_1,$$ при r=a $$M_1 = -\frac{qa^2}{8},\quad M_2 = -\mu\frac{qa^2}{8}$$ Найдем прогибы пластины $$w = C - \int_{r_0}^{r}\theta \cdot dr = C - \frac{q}{16D}\int_{r_0}^{r}(a^2 r - r^3) \cdot dr =$$ $$= C - \frac{q}{16D}\left[a^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r_0=0}^{r} = C - \frac{qa^2}{32D}\left(r^2 - \frac{r^4}{2a^2}\right).$$ Константу найдем из граничного условия в заделке при r=a (w=0)

№ задания	Формулировка и решение задания

$$0 = C - \frac{qa^2}{32D}\left(a^2 - \frac{a^2}{2}\right),$$

$$C = \frac{qa^4}{64D}$$

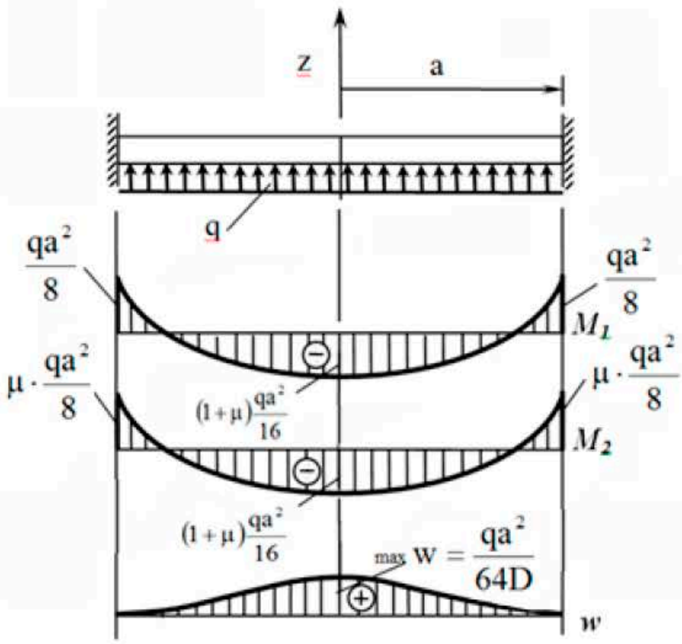
Тогда прогиб в любой точке пластинки будет:

$$w = \frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^2}{32D}\left(r^2 - \frac{r^4}{2a^2}\right) = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2$$

Наибольший прогиб в центре пластинки, при r=0:

$$w_{max} = \frac{qa^4}{64D}$$

Построим эпюры прогиба w, окружных и радиальных изгибающих моментов



В точках внешнего контура (r=a) радиальные (σ_1) и окружные (σ_2) нормальные напряжения у поверхности пластинки, то есть при $r = \pm\frac{h}{2}$

$$\sigma_1 = \frac{6M_1}{h^2} = \frac{6}{h^2} \cdot \frac{qa^2}{8} = \frac{3qa^2}{4h^2}, \quad \sigma_2 = \frac{6M_2}{h^2} = \frac{6}{h^2} \cdot \mu\frac{qa^2}{8} = \mu\frac{3qa^2}{4h^2}$$

В центре пластинки, при r=0:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{6}{h^2} \cdot (1+\mu)\frac{qa^2}{16} = (1+\mu)\frac{3qa^2}{8h^2}$$

Воспользуемся критерием Сен-Венана (считая верхнюю и нижнюю поверхности пластины равноопасными):

при r=a

№ задания	Формулировка и решение задания
	$\sigma_1 = \frac{3qa^2}{4h^2}$, $\sigma_2 = \mu \cdot \frac{3qa^2}{4h^2}$, $\sigma_3=0$ Эквивалентные напряжения: $\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{4}\frac{qa^2}{h^2}$ В центре пластинки (r=0): $\sigma_1 = \sigma_2 = (1+\mu)\frac{3qa^2}{8h^2}$, $\sigma_3=0$, $\sigma_{экв}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = (1+\mu)\frac{3}{8}\frac{qa^2}{h^2}$ Таким образом, наиболее опасной точкой пластинки является та, что расположена на контуре. Условие прочности выполняется: $\frac{3qa^2}{4h} = \frac{3 * 5 \cdot 10^6 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 125 \cdot 10^6 \leq 160 \cdot 10^6$