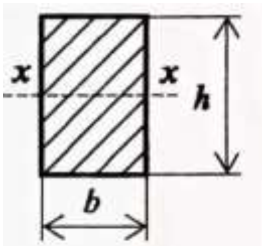
Пример решения задач билета

	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ№ **Вступительного испытания в магистратуру** По направлениям подготовки	Утверждаю Зам.председателя ПК«НИУ «МЭИ»
ЭнМИ	**15.04.03 Прикладнаямеханика** **15.04.06 – Мехатроника и робототехника**	2026г.

№ п/п	Формулировказадания
	БАЗОВАЯЧАСТЬ

1 Во сколько раз увеличится осевой момент инерции прямоугольного сечения относительно оси x при увеличении его размера b в два раза



Решение:
Осевой момент инерции прямоугольного сечения (1) размерами bxh относительно оси x определяется по формуле

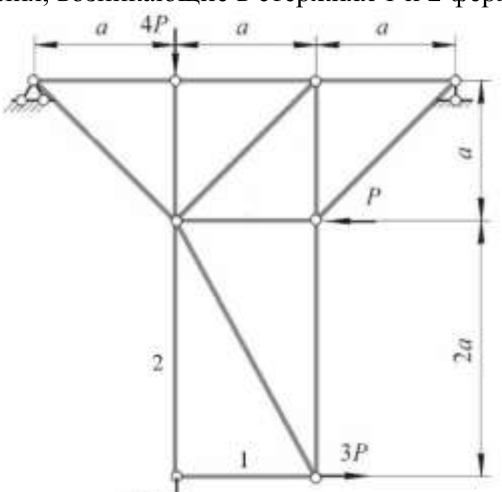
$$J_x^1 = \frac{bh^3}{12}$$

Осевой момент инерции прямоугольного сечения (2) размерами $2b$xh относительно оси x определяется по формуле

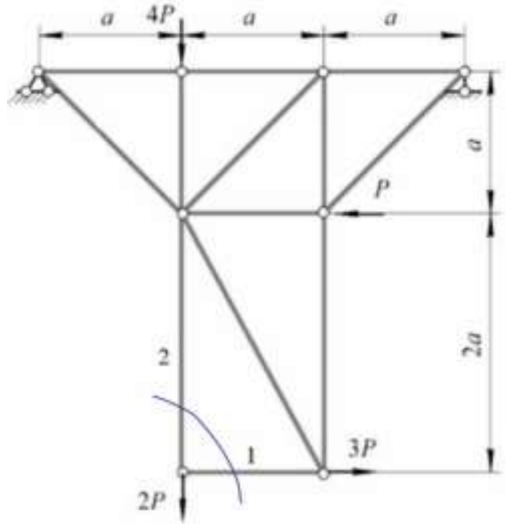
$$J_x^2 = \frac{2bh^3}{12}$$

Ответ:момент инерции прямоугольного сечения относительно оси x при увеличении его размера b в два раза увеличится в два раза: $J_x^2 = 2J_x^1$

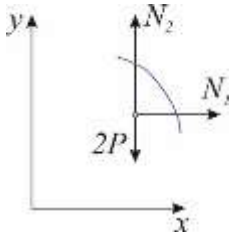
2 Определить внутренние усилия, возникающие в стержнях 1 и 2 фермы (P=10 кН, a=0,5 м)



Решение:
Вырежем узел фермы с приложенной силой 2Ркак показано на рисунке.



Запишем условия равновесия для вырезанного узла фермы.



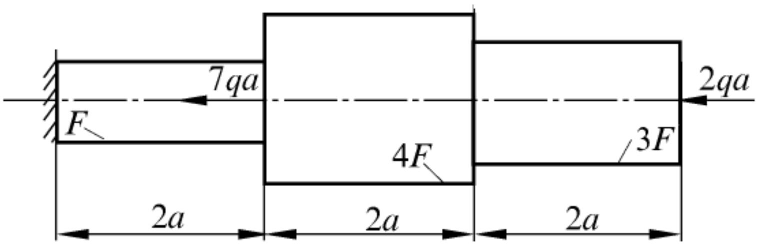
Суммы всех сил на оси координат должны быть равны нулю

$$\sum x = 0\colon N_1 = 0$$

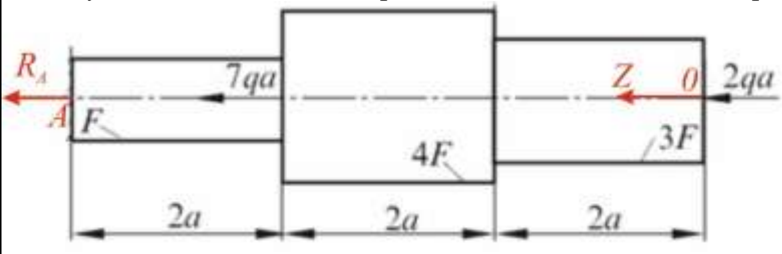
$$\sum y = 0\colon N_2 - 2P = 0, N_2 = \ 2P = 20 \text{ кН}$$

Ответ:в стержне 1 внутреннее усилие равно нулю,
в стержне 2 возникает растягивающее усилие 20 кН.

3 Определить величину продольного усилия, возникающего в месте закрепления ступенчатого стержня (площадь поперечного сечения F=10 см^2, a= 0,5 м, q=10 кН/м)



Решение:
Заделку в сечении *А*заменяем реакцией R_A, как показано на рисунке.



Уравнение равновесия системы:

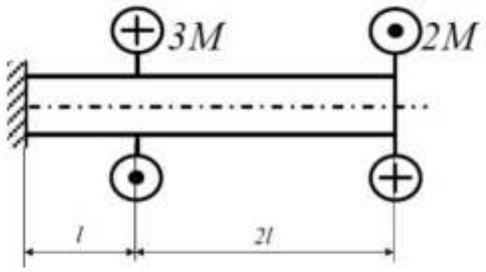
$$\sum Z = 0\colon 2qa + 7qa + R_A = 0$$

Следовательно, в заделке будет возникать сжимающее усилие:

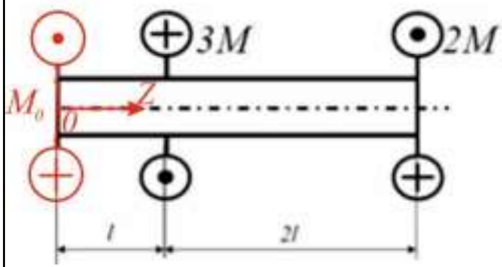
$$R_A = -2qa - 7qa = -9qa = -9 * 10\,000 * 0.5 = -45\,000 \text{ (Н)} = -45 \text{(кН)}$$

Ответ:продольное усилие, возникающее в месте закрепления ступенчатого стержня будет сжимающим и равным 45 (кН) **или**в месте закрепления ступенчатого стержня возникает

<table>
<tr><td></td><td>продольное усилие –45 (кН)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Определить величину крутящего момента (по модулю), возникающего в месте закрепления вала, если M= 1кН·м, l=1 м



Решение:
Заделку в сечении 0заменяем неизвестным моментомM_0, как показано на рисунке.



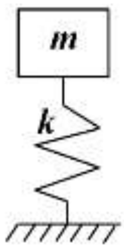
Уравнение равновесия системы:

$$\sum mom_Z = 0: 2M - 3M + M_0 = 0$$

Следовательно, в заделке будет возникать момент:

$$M_0 = 3M - 2M = M = 1(\text{кН} \cdot \text{м})$$

Ответ:величина крутящего момента (по модулю), возникающего в месте закрепления вала составляет 1 кН·м.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Определить собственную частоту колебаний подрессоренной массы (оборудования) m=1200 кг, если жесткость пружин подвески k=50 кН/м. Массой пружин подвески по сравнению с массой оборудования пренебречь



Решение:
Уравнение для определения собственных частот колебаний

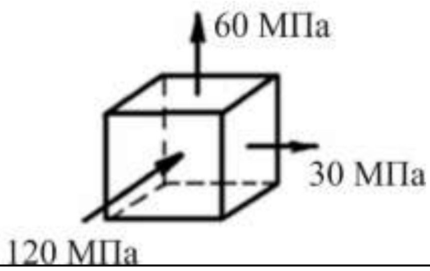
$$|k - \omega^2 m| = 0$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50\,000}{1\,200}} \approx 6.45 \left(\frac{1}{\text{с}}\right)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6.45}{2\pi} \approx 1\ (\text{Гц})$$

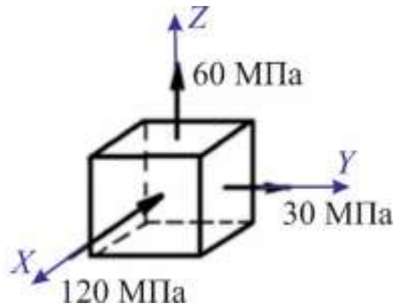
Ответ: Собственная частота колебаний подрессоренной массы равна 1 Гц.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Для заданного напряженного состояния вычислить эквивалентные напряжения по критерию


</td></tr>
</table>

прочности Сен-Венана

Решение:

Для представленного элемента



$$\sigma_x = -120\ \text{МПа}, \sigma_y = 30\ \text{МПа}, \sigma_z = 60\ \text{МПа}$$

Главные напряжения, упорядоченные по убыванию:

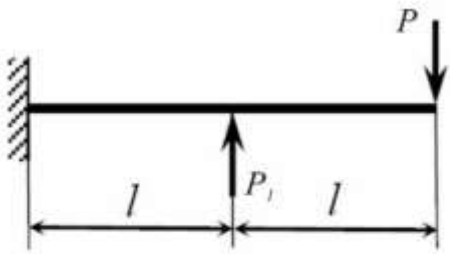
$$\sigma_1 = 60\ \text{МПа}, \sigma_2 = 30\ \text{МПа}, \sigma_3 = -120\ \text{МПа}.$$

Эквивалентные напряжения по критерию прочности Сен-Венана:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 60 - (-120) = 180\ \text{МПа}.$$

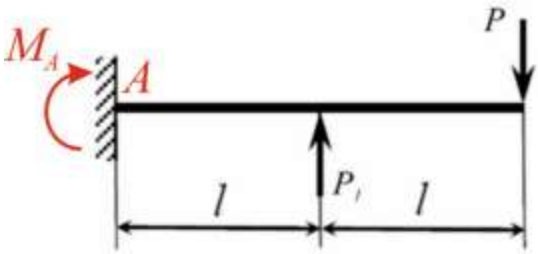
Ответ:Для заданного напряженного состоянияэквивалентные напряжения по критерию прочности Сен-Венана равны 180 МПа.

7 Определить величину силы P_1, при которой изгибающий момент в заделке будет равен нулю, если P=10 кН, l=1 м



Решение:

Определим величину изгибающего момента M_A в заделке в общем виде, записав условие равновесия через сумму моментов относительно точки А.



$$M_A + P \cdot 2l - P_1 \cdot l = 0$$

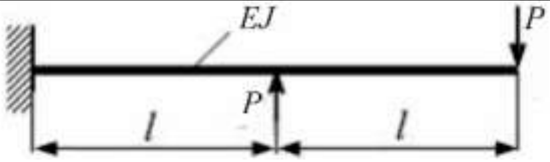
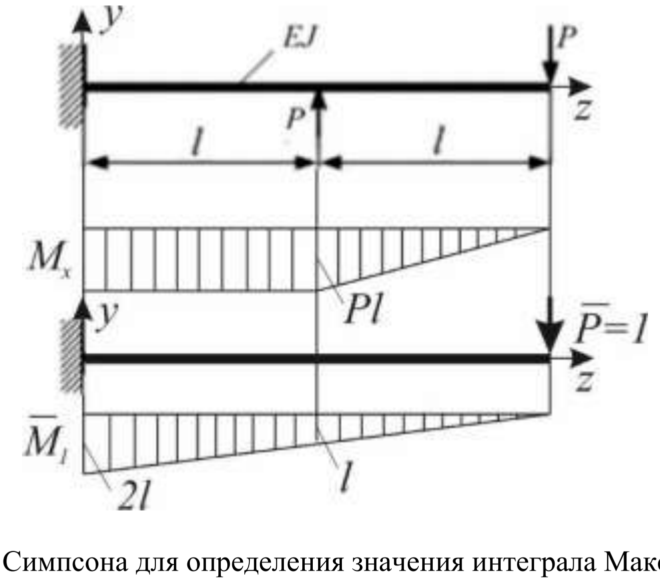
Следовательно, чтобы M_A в заделке был равен нулю должно выполняться условие:

$$P \cdot 2l = P_1 \cdot l$$

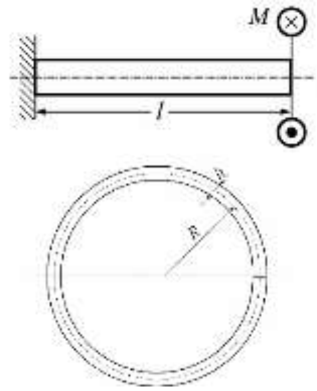
т.е. значение P_1должно быть равно 2P и равно$2 \cdot 10$ =20 кН.

Ответ:приP_1=20 кН изгибающий момент в заделке будет равен нулю.

	ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ№ **Вступительного испытания в магистратуру** По направлениям подготовки	Утверждаю Зам.председателя ПК«НИУ «МЭИ»
ЭнМИ	**15.04.03 Прикладная механика**	2026г.

№ п/п	Формулировка задания
	СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ БЛОК 1
8	 Значение силы P, при которой прогиб концевого сечения балки будет Δ, равно: 1) $P = \frac{6}{11}\frac{l^3}{EJ}\Delta$ 2) $P = \frac{6}{11}\frac{EJ}{l^3}\Delta$ 3)$P = \frac{6}{11}\frac{l^3}{EJ\Delta}$ 4) $P = \frac{6}{11}l^3 EJ\Delta$ При решении задачи жесткость балкиEJ_x, длину пролета и прогиб концевого сечения считать известными **Решение:** Для того, чтобы определить прогиб концевого сечения балки построим эпюры изгибающего момента от внешних сил M_x, а также эпюру единичного изгибающего момента $\overline{M_1}$от единичной силы $\overline{P_1}$, приложенной в месте искомого перемещения.  Используем правило Симпсона для определения значения интеграла Максвелла-Мора: $$\Delta = \int_0^{2l}\frac{M_x\overline{M_1}}{EJ_x}dz = \frac{1}{EJ_x}\left[\frac{l}{6}\left(Pl\cdot 2l + 4\cdot Pl\cdot\frac{3}{2}l + Pl\cdot l\right) + \frac{l}{6}\left(Pl\cdot l + 4\cdot\frac{Pl}{2}\cdot\frac{1}{2}l\right)\right] = \frac{11Pl^3}{6EJ_x}$$ Отсюда найдем значение силы P при которой прогиб концевого сечения балки будет Δ $$P = \frac{6}{11}\frac{EJ}{l^3}\Delta$$ **Ответ:**правильный ответ 2) $P = \frac{6}{11}\frac{EJ}{l^3}\Delta$.
9	Определить угол поворота сечениястержня, в котором приложен крутящий момент M=10 кН·м. Длина стержня l=3 м. Модуль сдвига принять равным 80 ГПа. Сечение представляет собой

тонкостенный незамкнутый профиль (R=30 см, h=3см)



Решение:

Характеристику жесткости для тонкостенного стержня открытого профиля найдем по формуле:

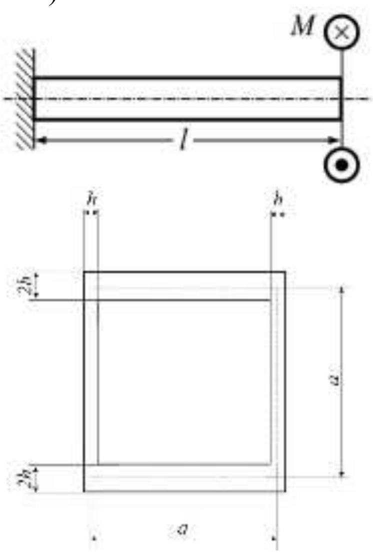
$$J_{\text{кр}} = \frac{1}{3}(2\pi R)h^3$$

Угол поворота сечения определим по формуле:

$$\varphi = \frac{Ml}{GJ_{\text{кр}}} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3}{80 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{3}(2 \cdot 3.14 \cdot 0.3) \cdot 0.03^3} \approx 0.022 \text{ (рад)}$$

Ответ:угол поворота сечениястержня, в котором приложен крутящий момент равен 0.022 рад.

10 Определить максимальные напряжения для стержня, нагруженного на краю крутящим моментом M=10 кН·м. Длина стержня l=3 м. Сечение представляет собой тонкостенный замкнутый профиль (a=20 см, h=2 см)



Решение:

Максимальные касательные напряжения в тонкостенном стержне закрытого профиля найдем по формуле Бредта:

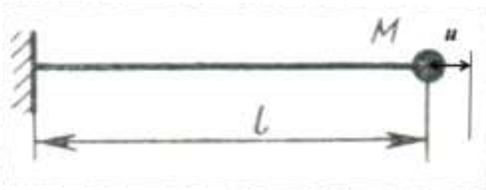
$$\tau_{max} = \frac{M}{\Omega \delta_{min}},$$

где Ω – удвоенная площадь фигуры, ограниченной профильной линией тонкостенного стержня закрытого профиля, равна a^2, $\delta_{min} = h$ - минимальная толщина профиля тонкостенного стержня закрытого профиля.

$$\tau_{max} = \frac{10 \cdot 10^3}{0.2^2 \cdot 0.02} = 12.5 \text{ (МПа)}$$

Ответ:максимальные касательные напряжения в тонкостенном стержне закрытого профиля равны 12.5 МПа.

11 Определить собственную частоту (ответ дать в Герцах) продольных колебаний стержня прямоугольного поперечного сечения (ширина b=10см, высота h=25 см) с сосредоточенной массой M=80 кгна конце. Длина стержня l=3 м. Принять модуль упругости материала стержня E=200 ГПа.



Решение:

Уравнение для определения собственных частот колебаний имеет вид

$$|k-\omega^2 M| = 0,$$

где

$$k = \frac{EF}{l}.$$

Тогда

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EF}{Ml}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Ebh}{Ml}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200\cdot 10^9\cdot 0.1\cdot 0.25}{80\cdot 3}} \approx 726\ (\text{Гц})$$

Ответ:собственная частота продольных колебаний стержня составляет 726 Гц.

12 Определить толщину стенки для замкнутой тонкостенной сферической оболочки радиуса R=1 м, нагруженной внутренним давлением p=1 МПа, по критерию прочности Сен-Венана. Принять допускаемые напряжения равными 170 МПа

Решение:

Для сферической оболочки, под действием внутреннего давления, в силу симметрии, меридиональные и окружные напряжения равны между собой и могут быть определены из уравнения Лапласа:

$$\frac{\sigma_m}{R_m} + \frac{\sigma_\theta}{R_\theta} = \frac{p}{\delta}\ ,$$

где радиусы кривизны для сферической оболочки $R_m = R_\theta = R$, по формуле:

$$\sigma_m = \sigma_\theta = \frac{pR}{2\delta}.$$

Принимая, что согласно гипотезам Кирхгофа-Лява в классической теории оболочек $\sigma_z = 0$, найдем главные напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta},\quad \sigma_3 = 0$$

и определим эквивалентное напряжение по критерию прочности Сен-Венана

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pR}{2\delta}.$$

Из условия прочности

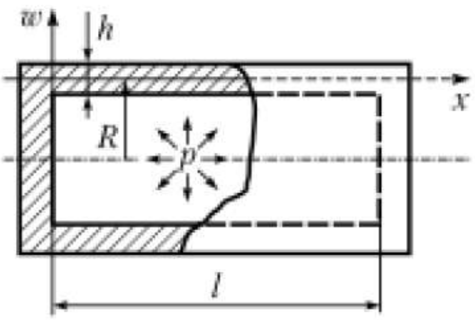
$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{pR}{2\delta} \le [\sigma]$$

найдем толщину стенки замкнутой сферической оболочки:

$$\delta \ge \frac{pR}{2[\sigma]} = \frac{1\cdot 10^6\cdot 1}{2\cdot 170\cdot 10^6} \approx 0.0029\ (\text{м})$$

Ответ:принимаем толщину стенки для замкнутой тонкостенной сферической оболочки равной 3 мм

13 Для тонкостенной цилиндрической оболочки с жесткими днищами(R=200 мм, l=2 м, h=3 мм), нагруженной внутренним давлением p=3 МПа определить прогиб оболочкиw по безмоментной теории. Принять модуль упругости материала E=200 ГПа, коэффициент Пуассона ν=0,3



Решение:

Прогиб оболочкиw по безмоментной теории определим как величину частного решения неоднородного уравнения осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки:

$$w_{\text{ч.н.}} = \frac{R^2}{Eh}\left(p - \nu\frac{N_x}{R}\right)$$

Продольное усилие N_x найдем уравновешивая отсеченное жесткое днище оболочки из уравнения:

$$N_x = \frac{p\pi R^2}{2\pi R} = \frac{pR}{2}.$$

Тогда, при ν=0,3

$$w_{\text{ч.н.}} = 0.85\frac{pR^2}{Eh}.$$

Откуда

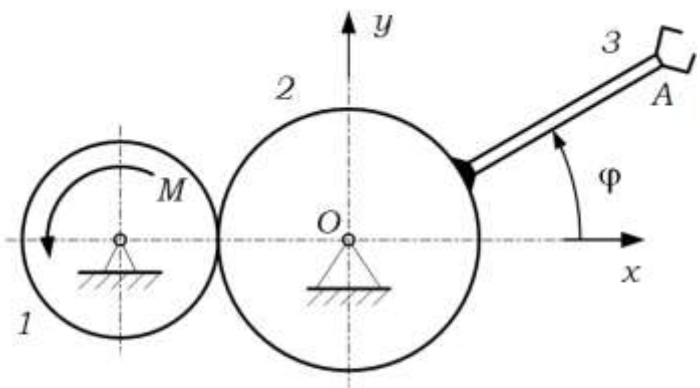
$$w_{\text{ч.н.}} = 0.85\frac{3\cdot 10^6\cdot 0.2^2}{200\cdot 10^9\cdot 0.003} = 0.17\ (\text{мм})$$

Ответ:прогиб тонкостенной цилиндрической оболочки с жесткими днищами по безмоментной теории равен 0.17 (мм).

МЭИ	**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ№** **Вступительного испытания в магистратуру** По направлению подготовки	Утверждаю Зам.председателя ПК«НИУ «МЭИ»
ЭнМИ	**15.04.03 Мехатроника и робототехника**	2026г.

№п/п	**Формулировка задания**
СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ БЛОК 2	

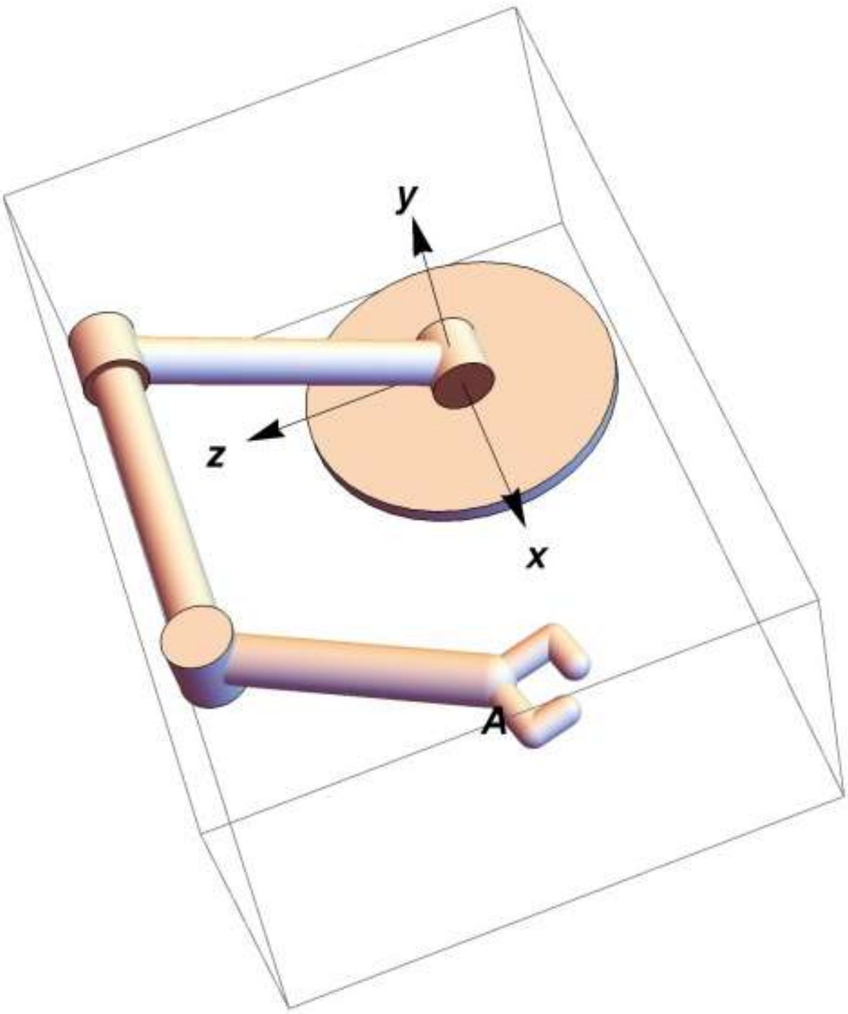
«Мехатроника и робототехника»
Пример решения задачи на вступительном экзамене в магистратуру



УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

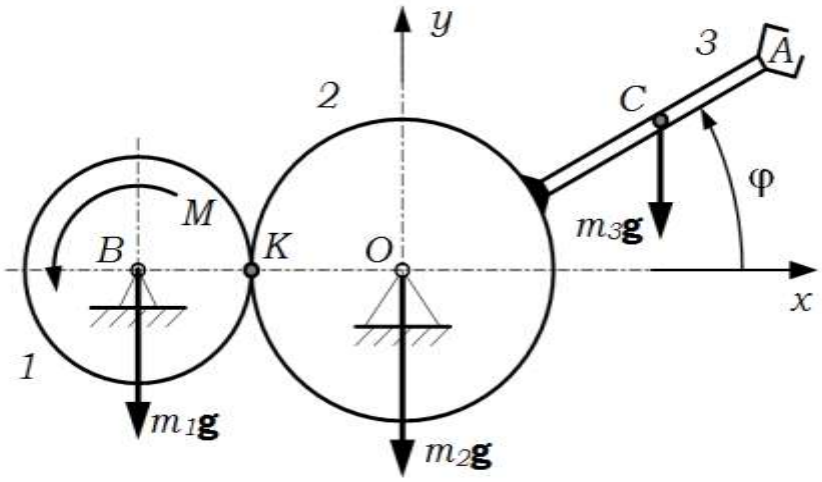
Исследуемая система

Манипулятор, схема которого приведена на рисунке, работает в вертикальной плоскости. Стрела манипулятора 3 жёстко соединена с зубчатым колесом 2, на которое передаётся вращение с шестерни 1. Перечисленные тела считать абсолютно твёрдыми и однородными. Заданы массытел m_j ирадиусы колёсr_1иr_2, а также длина стрелы $l = OA$ (индексы отвечают номеру тела на схеме).Момент, развиваемый электродвигателем манипулятораравен $M_z = c_1 \cdot U - c_2 \cdot \omega_{1z}$, где$U$ -напряжение, подаваемое надвигатель; ω_{1z} -угловая скорость ведущего колеса. Трением в шарнирах пренебречь, считать, что контакт колёс осуществляется без проскальзывания. Угол поворота стрелы φ принять за обобщённую координату. Измерению доступна угловая скорость стрелы $\dot{\varphi}$.

№ п/п	Формулировка вопроса
8.1	Составить уравнения движения исследуемой системы. Определить величину напряжения $U = U_0$, которое необходимо подать на двигатель для позиционирования стрелы манипулятора в положение равновесия $\varphi = \varphi_0 = 30°$.
8.2	Провести линеаризацию уравнений движения исследуемой системы в окрестности положения равновесия $\varphi \equiv \varphi_0$. Записать линеаризованные уравнения в нормальной форме Коши $$\dot{X} = AX + Bu, \quad Y = CX, \qquad (1)$$ где $X = (\Delta\varphi \quad \Delta\omega)^T \equiv (\varphi - \varphi_0 \quad \dot{\varphi})^T$ - вектор состояния, $Y = \Delta\omega$ - измеряемая переменная, $u = U - U_0$ - управление.
8.3	Понятие полной наблюдаемости линейной системы. Критерий наблюдаемости Калмана.
8.4	Исследовать систему (1) на управляемость и наблюдаемость.
8.5	Построить асимптотический наблюдатель (фильтр) вектора $X = (\Delta\varphi \quad \Delta\omega)^T$ состояния системы (1).
9.1	Для манипулятора известной конфигурации ввести в сочленениях робота системы координат и записать матрицы ориентации i-й системы координат относительно i-1 

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для удобства решения введём вспомогательные обозначения для шарниров и центров масс тел на схеме. Укажем на схеме силы тяжести.



1. Составим уравнения движения исследуемой системы, используя уравнения Лагранжа второго родадля обобщённой координаты φ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

где T – кинетическая энергия системы, Q – обобщённая сила.

1.1. Кинетическая энергия имеет вид:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Кинетическая энергия ведущего колеса 1 равна:

$$T_1 = \frac{I_B \omega_1^2}{2},$$

где ω_1 –угловая скорость ведущего колеса, $I_B = m_1 r_1^2 / 2$ – его момент инерции относительно оси вращения; кинетическая энергия колеса 2 равна:

$$T_2 = \frac{I_O \omega_2^2}{2},$$

где ω_2 –угловая скорость колеса 2, $I_O = m_2 r_2^2 / 2$ – его момент инерции относительно оси вращения;кинетическая энергия стрелы 3 равна:

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2} + \frac{I_C \omega_3^2}{2},$$

где ω_3 –угловая скорость стрелы, v_C – скорость её центра масс, $I_C = m_3 l^2 / 12$ – её момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Выразим перечисленные скорости через обобщённую скорость и координату.
По определению $\omega_{3z} = \dot{\varphi}$.

Т.к. тела 2 и3 жёстко соединены, то $\omega_{2z} = \omega_{3z} = \dot{\varphi}$.

Скорость центра масс стрелы найдём по формуле Эйлера

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \left[\vec{\omega}_3, \overline{OC}\right]$$

или, что тоже самое, из кинематического графа

$$O \xrightarrow[\varphi,\ 3]{} C.$$

Поскольку $\vec{v}_O = 0$, то

$$v_{Cx} = v_{Ox} - (r_2 + l/2)\omega_{3z}\sin\varphi = -(r_2 + l/2)\dot{\varphi}\sin\varphi,$$
$$v_{Cy} = v_{Oy} + (r_2 + l/2)\omega_{3z}\cos\varphi = (r_2 + l/2)\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Отсюда

$$v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 = (r_2 + l/2)^2\dot{\varphi}^2 .$$

Угловую скорость ведущего колеса найдём из кинематической цепочки

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \left[\vec{\omega}_2, \overrightarrow{OK}\right] + \left[\vec{\omega}_1, \overrightarrow{KB}\right]$$

или, что тоже самое, из графа

$$O \xrightarrow[180^\circ,\ \ 2]{} K \xrightarrow[180^\circ,\ \ 1]{} B .$$

Поскольку $\vec{v}_O = \vec{v}_B = 0$, то

$$v_{By} = v_{Oy} + r_2\omega_{2z}\cos 180^\circ + r_1\omega_{1z}\cos 180^\circ = -r_2\dot{\varphi} - r_1\omega_{1z} = 0.$$

Отсюда

$$\omega_{1z} = -\frac{r_2\dot{\varphi}}{r_1}.$$

Запишем выражение кинетической энергии через обобщённую скорость и координату:

$$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1 r_1^2}{2}\frac{r_2^2\dot{\varphi}^2}{r_1^2} + \frac{m_2 r_2^2\dot{\varphi}^2}{2} + m_3\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m_3 l^2\dot{\varphi}^2}{12}\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left\{\frac{(m_1 + m_2)r_2^2}{2} + m_3\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m_3 l^2}{12}\right\}}_{J}\dot{\varphi}^2 = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2},$$

где J –приведённый момент инерции.

1.2. Обобщённая сила

Найдём возможную мощность активных сил:

$$N_{акт}^{в} = (\vec{M}, \vec{\omega}_1^{в}) + \underbrace{(m_1\vec{g}, \vec{v}_B^{в})}_{0} + \underbrace{(m_2\vec{g}, \vec{v}_O^{в})}_{0} + (m_3\vec{g}, \vec{v}_C^{в}) = M_z\omega_{1z}^{в} - m_3 g v_{Cy}^{в} =$$
$$= -\frac{r_2 M_z\dot{\varphi}^{в}}{r_1} - m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\dot{\varphi}^{в}\cos\varphi = \underbrace{\left\{-\frac{r_2 M_z}{r_1} - m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi\right\}}_{Q}\dot{\varphi}^{в}.$$

Отсюда обобщённая сила равна:

$$Q = -\frac{r_2 M_z}{r_1} - m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi = -\frac{r_2}{r_1}\left(c_1 U - c_2\omega_{1z}\right) - m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi =$$
$$= -\frac{r_2}{r_1}\left(c_1 U + \frac{c_2 r_2}{r_1}\dot{\varphi}\right) - m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi.$$

Замечание. В рассматриваемой задаче допускается использование действительной мощности активных сил, а не возможной, для нахождения обобщённой силы. В этом случае верхние индексы «*в*» у скоростей и мощности опускаются.

1.3. Уравнение движения

Найдём левую часть уравнений Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J\dot{\varphi}\right) = J\ddot{\varphi}$$

и, приравняв её к обобщённой силе, получаем **уравнение движения системы**:

$$J\ddot{\varphi} = -n^2 c_2\dot{\varphi} - m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi - nc_1 U,$$

где $n = r_2 / r_1$.

1.4. Расчёт управляющего напряжения в положении равновесия $\varphi = \varphi_0 = 30°$

Подставим значения $\varphi = \varphi_0 = 30°,\ \dot\varphi = 0,\ \ddot\varphi = 0,\ U = U_0$, отвечающие положению равновесия в уравнения движения системы:

$$0 = -m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\cos\varphi_0 - nc_1 U_0.$$

Отсюда управляющее напряжение равно

$$U_0 = -\frac{\sqrt{3} m_3 g}{2nc_1}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right).$$

2. Линеаризация уравнения движения в окрестности положения равновесия

Введём отклонения величин от положения равновесия:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0, \quad \Delta\dot\varphi = \dot\varphi - 0 = \Delta\omega, \quad \Delta\ddot\varphi = \ddot\varphi - 0 = \Delta\dot\omega, \quad u = U - U_0.$$

Линеаризация уравнений движения в окрестности положения равновесия даёт:

$$J\Delta\ddot\varphi = -n^2 c_2 \Delta\dot\varphi + m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\Delta\varphi \sin\varphi_0 - nc_1 u,$$

$$J\Delta\dot\omega = -n^2 c_2 \Delta\omega + m_3 g\left(r_2 + \frac{l}{2}\right)\Delta\varphi \sin\varphi_0 - nc_1 u.$$

Измерению доступна величина

$$Y = \Delta\omega.$$

Запишем линеаризованные уравнения динамики в форме Коши:

$$\begin{cases} \Delta\dot\varphi = \Delta\omega, \\ \Delta\dot\omega = -\dfrac{n^2 c_2}{J}\Delta\omega + \dfrac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \dfrac{l}{2}\right)\Delta\varphi - \dfrac{nc_1}{J}u, \\ Y = \Delta\omega. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в векторно-матричной форме:

$$\dot X = AX + Bu, \quad Y = CX,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\omega \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \dfrac{l}{2}\right) & -\dfrac{n^2 c_2}{J} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{nc_1}{J} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Исследование управляемости и наблюдаемости

Поскольку матрицы A, B, C постоянные, то исследование управляемости и наблюдаемости можно провести, используя критерии Калмана.

Построим матрицу управляемости Калмана

$$\left(B \mid AB\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\dfrac{nc_1}{J} \\ -\dfrac{nc_1}{J} & -\dfrac{n^3 c_1 c_2}{J^2} \end{array}\right).$$

Её ранг совпадает с порядком системы и равен 2 (т.к. $\det\left(B \mid AB\right) = -\left(nc_1 / J\right)^2 \neq 0$), следовательно система полностью управляема по критерию Калмана.

Построим матрицу наблюдаемости Калмана

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hline \frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) & -\frac{n^2 c_2}{J} \end{pmatrix}.$$

Её ранг совпадает с порядком системы и равен 2 (т.к. $\det\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = -\frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) \neq 0$), следовательно система полностью наблюдаема по критерию Калмана.

4. Синтез управления

Поскольку система полностью управляема, то возможно подобрать закон управления по обратной связи из условия асимптотической устойчивости.

Рассмотрим управление $u = k\Delta\varphi$. Искомый постоянный коэффициент усиления k подберём из условия устойчивости.

Подстановка $u = k\Delta\varphi$ в линеаризованные уравнения даёт:

$$\dot{X} = A_c X, \quad A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) - \frac{nc_1}{J}k & -\frac{n^2 c_2}{J} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы A_c системы с обратной связью имеет вид:

$$\det(\lambda E - A_c) = \lambda^2 + \frac{n^2 c_2}{J}\lambda - \frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) + \frac{nc_1}{J}k.$$

Поскольку порядок системы равен двум, то необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов характеристического многочлена. Исходя из этих соображений, найдём значения коэффициента усиления:

$$-\frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) + \frac{nc_1}{J}k > 0,$$

$$k > \frac{m_3 g}{2nc_1}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right).$$

5. Синтез наблюдающего устройства (фильтра)

Поскольку система полностью наблюдаема по измерению $Y = \Delta\omega.$, то возможно провести точное оценивание всех компонент вектора состояния X и восстановить величину $\Delta\varphi$, используемую при расчёте управления, но не измеряемую напрямую.

Построим асимптотический наблюдатель (фильтр):

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Bu + L(Y - C\hat{X}),$$

где $X = \begin{pmatrix} \Delta\hat{\varphi} & \Delta\hat{\omega} \end{pmatrix}^T$ – вектор оценок переменных состояния, вырабатываемый наблюдателем; $L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}^T$ – искомый постоянный матричный коэффициент усиления.

Найдём L из условия затухания ошибок оценок, составляющих вектор $\tilde{X} = X - \hat{X}$. Это условие эквивалентно асимптотической устойчивости тривиального решения дифференциального уравнения ошибок

$$\dot{\tilde{X}} = A_o\tilde{X}, \ A_o = A - LC = \begin{pmatrix} 0 & 1 - L_1 \\ \frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) & -\frac{n^2 c_2}{J} - L_2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицыуравнения ошибок A_o имеет вид:

$$\det(\lambda E - A_o) = \lambda^2 + \left(\frac{n^2 c_2}{J} + L_2\right)\lambda - (1 - L_1)\frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right).$$

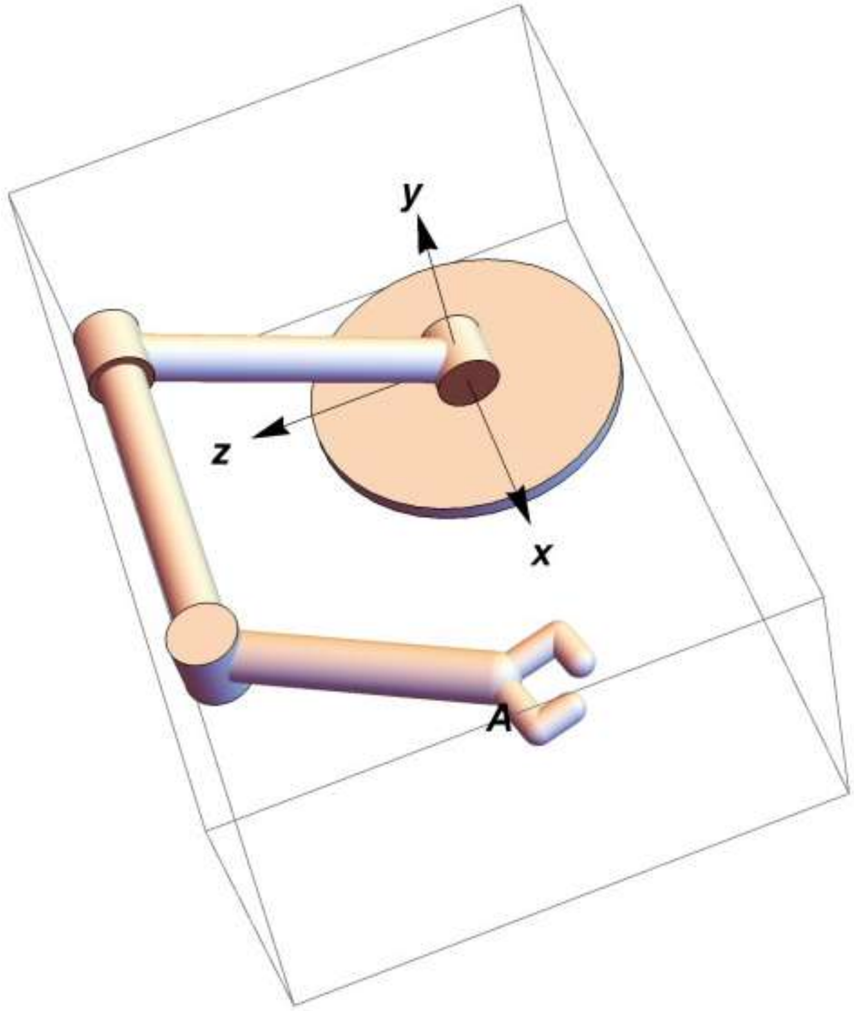
Поскольку порядок системы равен двум, то необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность коэффициентов характеристического многочлена. Исходя из этих соображений, найдём значения коэффициентов усиления наблюдателя:

$$\frac{n^2 c_2}{J} + L_2 > 0, \quad -(1 - L_1)\frac{m_3 g}{2J}\left(r_2 + \frac{l}{2}\right) > 0$$

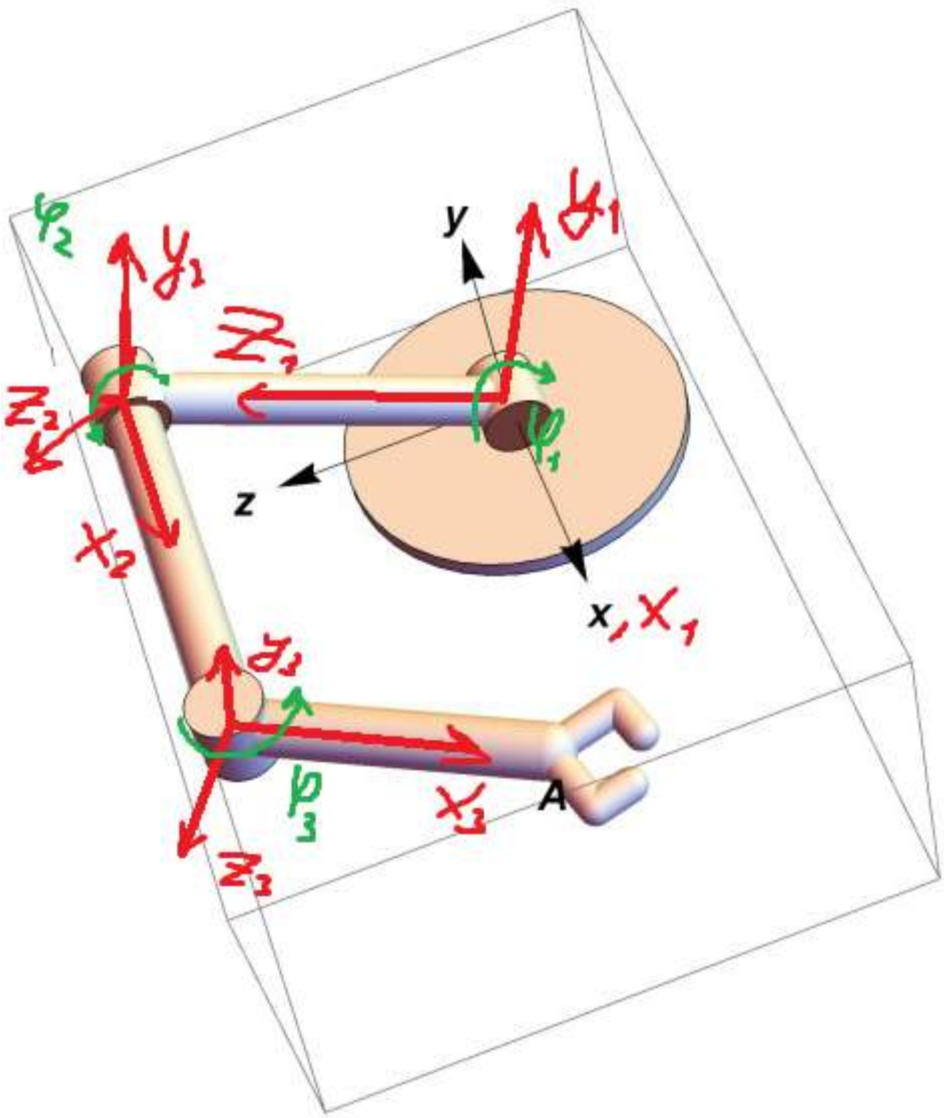
или

$$L_2 > -\frac{n^2 c_2}{J}, \quad L_1 > 1.$$

9.1Для манипулятора известной конфигурации ввести в сочленениях робота системы координат и записать матрицы ориентации i-й системы координат относительно i-1



1. Расставим системы координат связанные с сочленениями робота манипулятора



Звено 1. Поворачивается на угол φ_1вокруг оси xпо часовой стрелке матрица поворота (направляющих косинусов от основания до звена 1 будет иметь вид:

$$S_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \\ 0 & \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{pmatrix}$$

Звено 2. Поворачивается на угол φ_2вокруг оси x против часовой стрелкиматрица поворота (направляющих косинусов от звена 1 до 2 будет иметь вид:

$$S_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2) & \sin(\varphi_2) \\ 0 & -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

Звено 3. Поворачивается на угол φ_3вокруг оси y против часовой стрелкиматрица поворота (направляющих косинусов от звена 2 до 3 будет иметь вид:

$$S_{12} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_3) & 0 & -\sin(\varphi_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi_3) & 0 & \cos(\varphi_3) \end{pmatrix}$$